

数学科からの問題 No.7 (2020.5.20配信)

解説

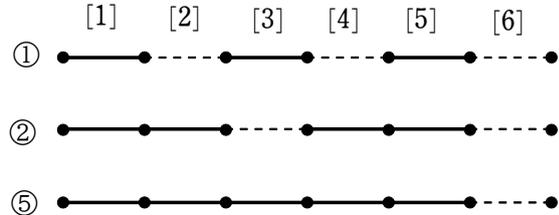
0秒から1秒を [1], 1秒から2秒を [2], 2秒から3秒を [3], ...で表すことにする。

a の電球が消灯しているのは, $[a + 1$ の倍数] のとき。また, それぞれの電球は, 以下の周期で点灯と消灯をくり返す。

電球	①	②	③	④	⑤
周期	2秒	3秒	4秒	5秒	6秒

(1) 電球①, ②, ⑤の周期は6秒になる。

右図より, ①, ②, ⑤がすべて点灯しているのは, [1] と [5] のとき, すなわち, [6で割った余り1] [6で割った余り5] のときである。



これに電球③ (4秒周期) を加えると, 12秒周期になる。

電球①②⑤は, [1], [5], [7], [11] で点灯していて, これらは4で割り切れないので, ③は点灯していることになる。よって, 電球①②③⑤がすべて点灯しているのは, [12で割った余りが1] [12で割った余りが5] [12で割った余りが7] [12で割った余りが11] である。

電球④ (5秒周期) を加えると, 60秒周期になり, 60秒までに, 12で割った余りが1, 5, 7, 11 のものを考えると,

1, ~~5~~, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ~~25~~, 29, 31, ~~35~~, 37, 41, 43, 47, 49, 53, ~~55~~, 59 (*)

であり, ④が点灯しているのは[5の倍数でない]ときなので, スイッチを入れてから20秒間で, 5つの電球がすべて点灯しているのは, [1][7][11][13][17][19] の6秒間

∴ 6秒間

(2) すべてが消灯しているのは, [60の倍数] のとき。

10分=600秒なので, すべて消灯しているのは, 10秒間

また, すべて点灯しているのは, (*) より, [1] ~ [60] では16秒間なので, 10分間だと, 160秒間

∴ (2) 【i】 10秒間 (2) 【ii】 160秒間

(3) $2016 = 60 \times 33 + 36$ なので,

すべて消灯しているのは, 33秒間

また, [1] ~ [36] ですべて点灯しているのが(*) より9秒間なので, 2016秒後までの間に, すべて点灯しているのは, $16 \times 33 + 9 = 537$ (秒間)

∴ (3) 【i】 33秒間 (3) 【ii】 537秒間